

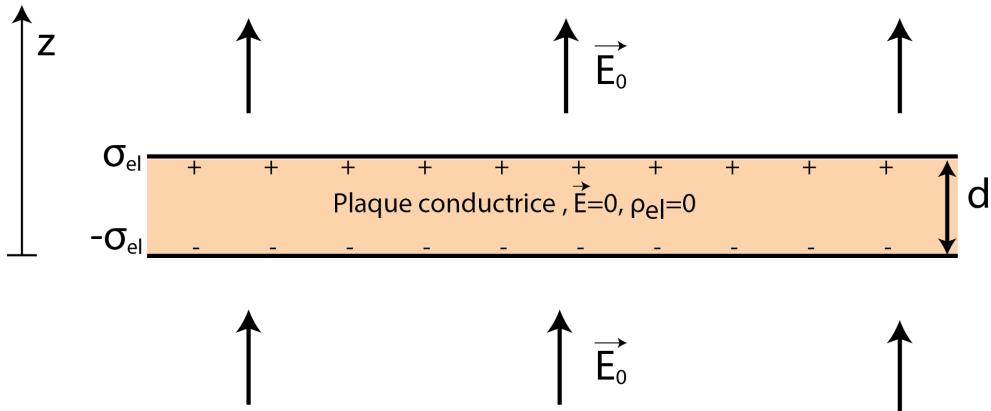
## Corrigé 9

### Exercice 1: Intégrales curvilignes

Étudiez les notes complémentaires sur les intégrales curvilignes mises à disposition sur moodle.

### Exercice 2: Une autre manière de déterminer $\phi$

Dans le cours, nous avons vu que si on place une plaque conductrice infinie et non-chargée dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0$  (avec la normale de la plaque parallèle à  $\vec{E}_0$ ), une densité de charge de surface  $\sigma_{el}$  se forme par influence sur la plaque, où  $\sigma_{el} = \epsilon_0 E_0$ .



À partir de cela, nous avons déterminé, dans le cours, le potentiel électrostatique  $\Phi$  partout dans l'espace avec la relation :

$$\Phi(B) - \Phi(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1)$$

- (a) Utiliser ici la relation différentielle  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$  pour déterminer  $\Phi$  à partir de  $\vec{E}$  par intégration.  
On suppose que  $\Phi = 0$  à  $z = 0$ .
- (b) Faire un schéma de la situation et indiquer les lignes de champ de  $\vec{E}$  ainsi que les surfaces équipotentielles.

**Solution:**

$$(a) \text{ On a : } -\vec{\nabla}\Phi = -\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que  $\Phi(x, y, z) = \Phi(z)$ . En exprimant  $E_z$  à l'extérieur et à l'intérieur de la plaque, on obtient :

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \begin{cases} E_0 & \text{for } z > d \\ 0 & \text{for } z \in ]0, d[ \\ E_0 & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

Ce qui entraîne que :

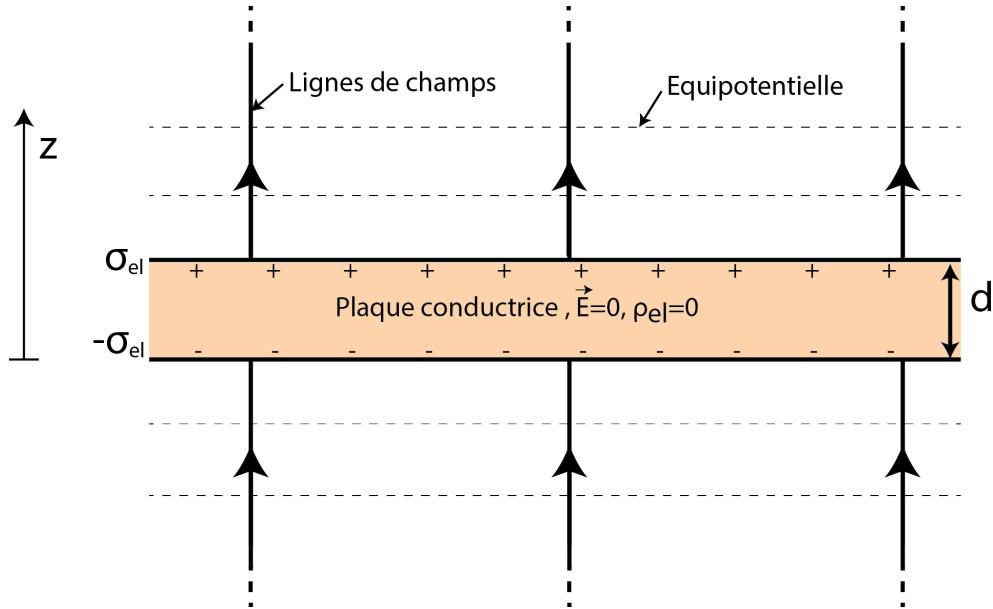
$$\Phi(z) = \begin{cases} -E_0 z + c_1 & \text{pour } z > d \\ c_2 & \text{pour } z \in ]0, d[ \\ -E_0 z + c_3 & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

où  $c_1$ ,  $c_2$ , et  $c_3$  sont des constantes d'intégration. En utilisant que  $\Phi(0) = 0$  et que le

potentiel est une grandeur continue, on obtient  $c_2 = 0$ ,  $c_1 = E_0 d$  et  $c_3 = 0$ . Et on a donc bien le résultat du cours :

$$\Phi(z) = \begin{cases} -E_0(z-d) & \text{pour } z > d \\ 0 & \text{pour } z \in [0, d] \\ -E_0 z & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

- (b) On sait que le potentiel est constant selon  $x$  et  $y$ . Les équipotentialles sont donc des surfaces planes définies par  $z = \text{cste}$ . Elles sont représentées sur la figure ci-dessous, ainsi que les lignes de champ  $E$ .



### Exercice 3: Effet de pointe

On considère un conducteur sphérique de rayon  $R$  et de charge  $Q$ .

- (a) Utilisez la loi de Gauss pour trouver le champ  $\vec{E}$  en tout point de l'espace.  
(b) Calculez le potentiel électrostatique partout dans l'espace en utilisant la relation suivante, vue en cours :

$$\phi(B) - \phi(A) = - \int_{A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Choisissez la constante libre du potentiel telle que  $\phi(\vec{r}) \rightarrow 0$  quand  $\vec{r} \rightarrow \infty$ .

- (c) On suppose maintenant que ce conducteur sphérique est maintenu à un potentiel  $V$  fixé, par exemple à l'aide d'une pile électrique. Exprimez le champ électrique à la surface de la sphère en fonction de  $R$ . Qu'est ce vous constatez si  $R \rightarrow 0$  ?

**Solution:**

- (a) Étant donné que le matériau est conducteur, la charge  $Q$  va directement se répartir sur la surface de la sphère. En plus, dû à la symétrie du problème, la densité de charge de surface qui en résulte sera homogène. On applique la loi de Gauss en utilisant la surface d'une sphère de rayon  $r$  centrée sur le centre de la sphère de rayon  $R$ . Par symétrie du problème, on déduit aisément que  $\vec{E}(\vec{r})$  est orienté selon  $\vec{e}_r$  et ne dépend que de  $r$  :  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r$ . On doit considérer deux cas :  $r < R$  (on calcule le champ  $\vec{E}$  à l'intérieur de la sphère) et  $r > R$  (on calcule le champ  $\vec{E}$  à l'extérieur de la sphère).

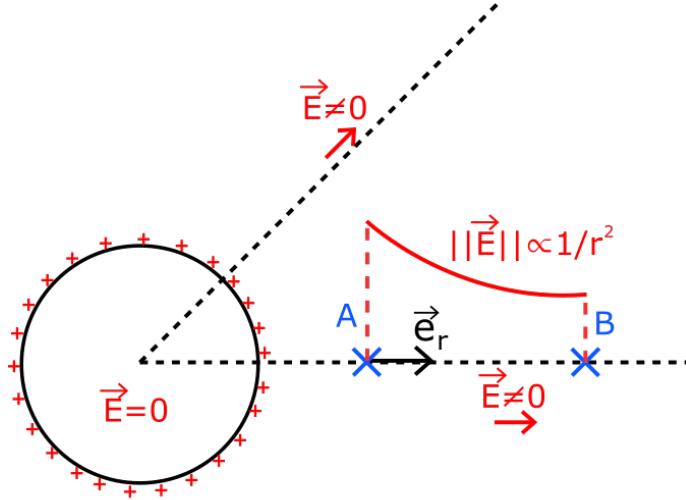
$r < R$ . Dans ce cas, comme on se trouve à l'intérieur du conducteur, on a directement que  $\vec{E} = \vec{0}$ , donc

$$E(r) = 0$$

$r > R$ . On applique le théorème de Gauss. On a directement

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- (b) On cherche à calculer le potentiel en un point  $A$ , en fixant une condition limite de sorte à ce que le potentiel s'annule à l'infini. Comme le champ électrique est purement radial et ne dépend que de  $r$  (voir la figure ci-dessous), on peut choisir un  $B$  tel que, en coordonnées sphériques,  $A$  et  $B$  soient tous les deux alignés sur l'axe fixé par  $\vec{e}_r$  en  $A$ .



On a alors que

$$\phi(B) - \phi(A) = - \int_{A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Supposons que  $A$  et  $B$  sont tous les deux à l'extérieur de la sphère conductrice. En utilisant que  $d\vec{l} = dr \vec{e}_r$ , il vient

$$\phi(B) - \phi(A) = - \int_{A \rightarrow B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot dr \vec{e}_r$$

Donc

$$\phi(B) - \phi(A) = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

On peut donc écrire que

$$\phi(B) - \phi(A) = \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

Et donc

$$\phi(A) = \phi(B) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Faisons maintenant tendre la position de  $B$  vers l'infini ( $r_B \rightarrow \infty$ ). On a  $\frac{1}{r_B} \rightarrow 0$  et  $\phi(B) \rightarrow 0$ , et donc, comme l'équation précédente reste valide,

$$\phi(A) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A}$$

Ainsi, on a, pour tout point de l'espace situé à l'extérieur de la sphère (en notant  $r = \|\vec{r}\|$ )

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Considérons maintenant un point  $A$  à l'intérieur de la sphère. Dans celle-ci,  $\vec{E} = \vec{0}$ , donc l'intégrande est non-nulle uniquement dans la partie du chemin située à l'extérieur de la sphère (toujours en considérant un point  $B$  à l'extérieur de la sphère)

$$\phi(B) - \phi(A) = - \int_R^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

On obtient alors

$$\phi(A) = \phi(B) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{R} \right)$$

Et en faisant tendre la position de  $B$  vers l'infini ( $r_B \rightarrow \infty$ ). On a  $\frac{1}{r_B} \rightarrow 0$  et  $\phi(B) \rightarrow 0$ , et donc, comme l'équation précédente reste valide,

$$\phi(A) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Par conséquent, pour un point à l'intérieur de la sphère, on a

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

En résumé :

$$\begin{cases} \phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} & \text{si } r < R \\ \phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & \text{sinon} \end{cases}$$

Notez que, de manière plus directe, on aurait pu trouver  $\phi$  par la relation  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ .

(c) On a, d'après les questions précédentes, que

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{et} \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

à l'extérieur de la sphère. Donc

$$E(r) = \frac{\phi}{r}$$

En particulier à proximité de la surface de la sphère, on a

$$E(R) = \frac{\phi}{R}$$

Si  $\phi$  est maintenu fixé à  $V$ , on a alors

$$E(R) = \frac{V}{R}$$

Par conséquent, pour un potentiel donné, le champ électrique à proximité de la sphère est d'autant plus fort que le rayon de celle-ci est petit. Pour une sphère de rayon  $R$  très petit, on peut donc arriver à générer des champs électriques très intenses. Ce phénomène peut par exemple être observé par des lueurs apparaissant aux extrémités des mâts des navires et sur les ailes des avions certains soirs : sous l'effet du champ électrique intense généré à ces extrémités par l'effet de pointe, l'air s'ionise (les électrons et les noyaux qui composent les atomes se séparent) et une lumière est émise. Le phénomène est connu sous le nom de feu de Saint-Elme.



Gauche : feu de Saint-Elme sur un bateau (G. Hartwig) dans *The Aerial World*, 1886.

Droite : feu de Saint-Elme sur un avion.

#### Exercice 4: Principe du générateur de Van de Graaff (examen 2017)

On considère un conducteur sphérique de rayon interne  $b$  et de rayon externe  $c$ . Le conducteur est isolé et porte une charge  $Q_1 > 0$ . Au centre de celui-ci, on place un conducteur sphérique de rayon  $a$ , avec  $a < b$ . Ce conducteur est isolé et porte une charge  $Q_2 > 0$ .

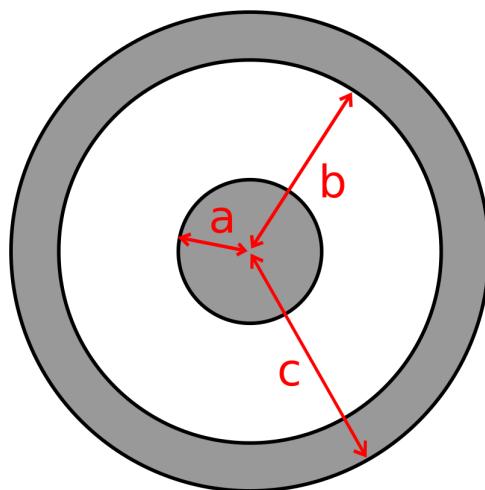
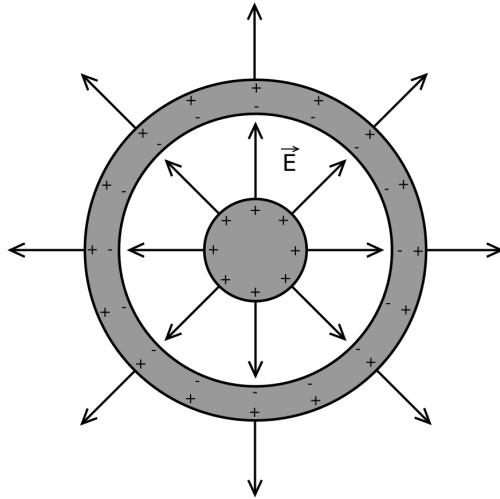


Figure - Les conducteurs l'un dans l'autre

- Dessinez qualitativement la situation en régime statique, en indiquant la direction et le sens du champ électrique  $\vec{E}$  et la répartition des charges.
- Déterminez  $\vec{E}$  dans tout l'espace.
- Déterminez la densité de charge de surface sur les deux conducteurs.
- Quelle est la différence de potentiel électrostatique entre les deux conducteurs ?
- On relie les deux conducteurs par un fil conducteur. Après avoir attendu un temps suffisamment long pour atteindre une situation statique, quelle sera la nouvelle répartition des charges ? Justifiez votre réponse.

**Solution:**

(a)



(b) Par symétrie du problème, on a que  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ .

Afin de déterminer  $E(r)$ , on utilise la loi de Gauss intégrale appliquée à une sphère de rayon  $r$  :

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

On distingue 3 situations

- Pour  $r < a$  et  $r \in ]b, c[$ , on a  $E(r) = 0$  (en électrostatique le champ électrique dans un conducteur est nul) .
- Pour  $r \in ]a, b[$ , on a  $Q_{int} = Q_2$  et donc d'après la loi de Gauss :  

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_2}{4\epsilon_0 \pi r^2}$$
- Pour  $r > c$  on a  $Q_{int} = Q_1 + Q_2$ . De la même manière, on obtient  $E(r) = \frac{Q_1+Q_2}{4\epsilon_0 \pi r^2}$

(c) En électrostatique, comme les charges dans un conducteur se répartissent en surface, on a pour le conducteur intérieur :

$$4\pi a^2 \sigma_2 = Q_2 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi a^2}$$

Pour le conducteur extérieur, on utilise d'abord que  $E(r) = 0$  pour  $b < r < c$  et donc, d'après le théorème de Gauss, la charge totale se trouvant à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r$  tel que  $b < r < c$  doit être nulle. Pour la densité de charge de surface sur la face intérieure, on trouve donc :

$$4\pi b^2 \sigma_1 = -Q_2 \Rightarrow \sigma_1 = -\frac{Q_2}{4\pi b^2}$$

Le conducteur étant globalement chargé, de charge  $Q_1$ , on obtient en effectuant un bilan des charges :

$$4\pi b^2 \sigma_1 + 4\pi c^2 \sigma'_1 = Q_1$$

et donc, pour la densité de charge sur la surface extérieure :

$$\sigma'_1 = \frac{Q_1}{4\pi c^2} - \frac{b^2}{c^2} \sigma_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi c^2}$$

(d) On a :

$$\begin{aligned}
 U &= \phi_b - \phi_a \\
 &= - \int_a^b E(r) dr \\
 &= - \int_a^b \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\
 &= \left[ \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_a^b \\
 &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)
 \end{aligned}$$

- (e) En reliant les deux conducteurs, on force  $U = 0$ . Pour que cette condition soit satisfaite, il faut donc, selon le résultat de la partie d), que  $Q_2 = 0$ . Ceci signifie que la charge sur le conducteur intérieur se déplace entièrement vers le conducteur extérieur. La charge de celui-ci sera  $Q_{tot} = Q_1 + Q_2$ . Par exemple, cette propriété est à la base du générateur de Van de Graaff qui est illustré dans l'extrait suivant du livre (montré ici simplement pour votre information) "Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics" écrit par Serway Jewett.

### The Van de Graaff Generator

Experimental results show that when a charged conductor is placed in contact with the inside of a hollow conductor, all the charge on the charged conductor is transferred to the hollow conductor. In principle, the charge on the hollow conductor and its electric potential can be increased without limit by repetition of the process.

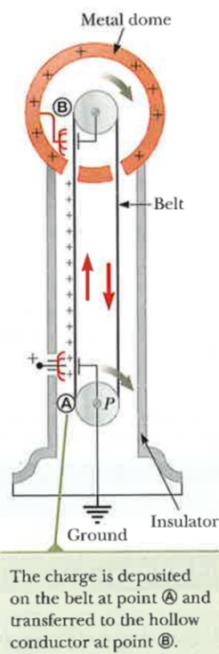
In 1929, Robert J. Van de Graaff (1901–1967) used this principle to design and build an electrostatic generator, and a schematic representation of it is given in Figure 25.23. This type of generator was once used extensively in nuclear physics research. Charge is delivered continuously to a high-potential electrode by means of a moving belt of insulating material. The high-voltage electrode is a hollow metal dome mounted on an insulating column. The belt is charged at point  $\textcircled{A}$  by means of a corona discharge between comb-like metallic needles and a grounded grid. The needles are maintained at a positive electric potential of typically  $10^4$  V. The positive charge on the moving belt is transferred to the dome by a second comb of needles at point  $\textcircled{B}$ . Because the electric field inside the dome is negligible, the positive charge on the belt is easily transferred to the conductor regardless of its potential. In practice, it is possible to increase the electric potential of the dome until electrical discharge occurs through the air. Because the "breakdown" electric field in air is about  $3 \times 10^6$  V/m, a sphere 1.00 m in radius can be raised to a maximum potential of  $3 \times 10^6$  V. The potential can be increased further by increasing the dome's radius and placing the entire system in a container filled with high-pressure gas.

Van de Graaff generators can produce potential differences as large as 20 million volts. Protons accelerated through such large potential differences receive enough energy to initiate nuclear reactions between themselves and various target nuclei. Smaller generators are often seen in science classrooms and museums. If a person insulated from the ground touches the sphere of a Van de Graaff generator, his or her body can be brought to a high electric potential. The person's hair acquires a net positive charge, and each strand is repelled by all the others as in the opening photograph of Chapter 23.

### The Electrostatic Precipitator

One important application of electrical discharge in gases is the *electrostatic precipitator*. This device removes particulate matter from combustion gases, thereby reducing air pollution. Precipitators are especially useful in coal-burning power plants and industrial operations that generate large quantities of smoke. Current systems are able to eliminate more than 99% of the ash from smoke.

Figure 25.24a (page 766) shows a schematic diagram of an electrostatic precipitator. A high potential difference (typically 40 to 100 kV) is maintained between



**Figure 25.23** Schematic diagram of a Van de Graaff generator. Charge is transferred to the metal dome at the top by means of a moving belt.

## Exercice 5: Visualisation du champ électrique avec la simulation Comsol

Accédez la simulation Comsol de deux conducteurs au lien suivant (accès avec votre login Gaspar) : <http://sbcomsol.intranet.epfl.ch:2036/>. L'utilisation d'un VPN est nécessaire pour y accéder en dehors de l'EPFL.

Familiarisez-vous avec la simulation *Electrostatique : deux métaux chargés - cage de Faraday*. Suivez les instructions pour changer la forme et la charge de chaque conducteur, et puis pour visualiser le champ électrique et le potentiel électrostatique générés par ces conducteurs chargés.

Dans cet exercice nous allons visualiser le champ électrique dû aux deux conducteurs de formes et charges différentes, et nous verrons certains effets électrostatiques.

- (a) Changez la dimension et la charge du cylindre pour le rendre négligeable. Modifiez le rayon de la barre creuse de section carrée pour lui donner la forme d'un tube circulaire :

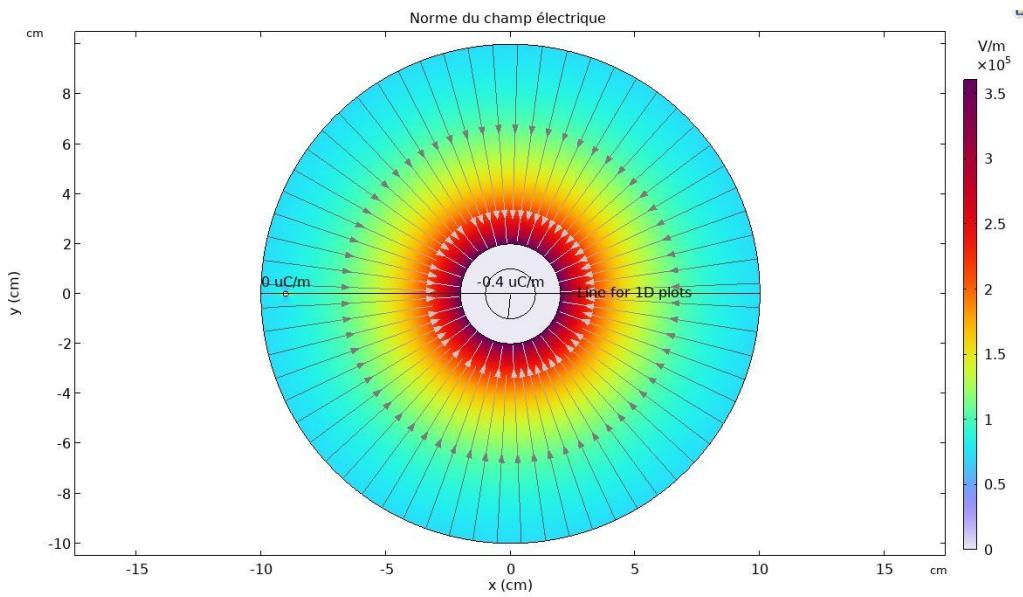
- Cylindre :
  - Rayon = 0.1 cm,
  - Position  $x = -9$  cm,
  - Charge  $C1 = 0$  C/m,
- Barre carrée
  - Rayon de courbure des coins = 2 cm,
  - Charge  $C1 = -0.4 \mu\text{C}/\text{m}$ .

Notez la forme du champ électrique à l'extérieur du tube, à l'intérieur du tube et dans le conducteur. Convainquez-vous, en particulier, que le champ électrique est en effet purement radial.

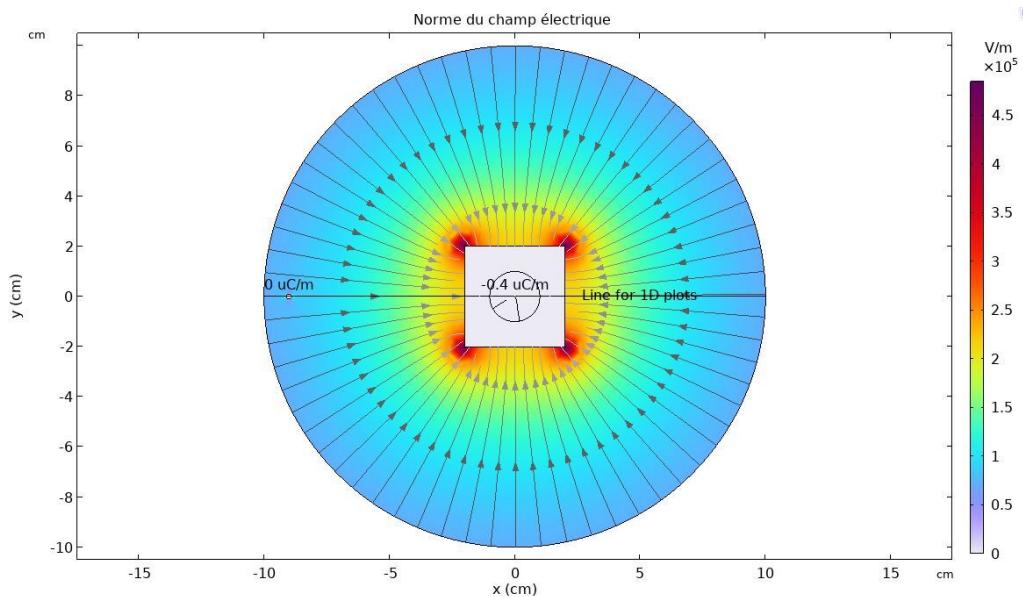
- (b) Revenez à la configuration de la barre carrée en mettant le rayon de courbure des coins à zéro. Notez maintenant la forme du champ électrique. Ce que vous observez est l'effet de pointe.
- (c) Inversez les charges des deux conducteurs pour rendre la barre carrée de charge zéro et pour que le cylindre agisse comme une charge ponctuelle. Expliquez la forme du champ électrique à l'intérieur de la barre carrée creuse.
- (d) Maintenant placez la charge ponctuelle à l'intérieur de la barre carrée creuse en mettant la position  $x$  à zéro. Expliquez la forme du champ électrique à l'extérieur du carré creux.

**Solution:**

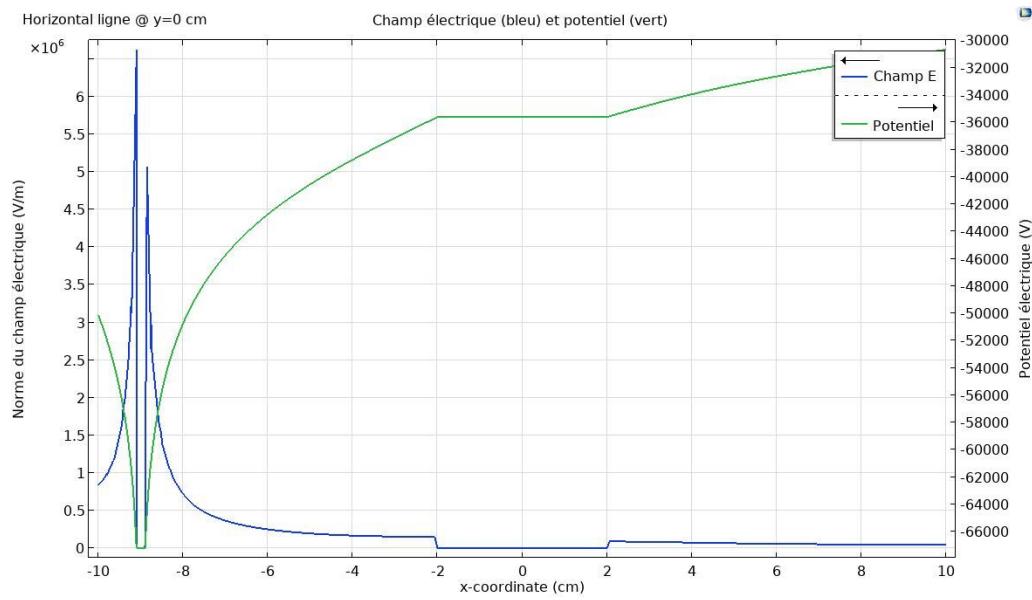
- (a) Pour un conducteur cylindrique et creux chargé négativement, vous trouveriez un champ électrique de la forme comme dans la figure. Les lignes de champ pointerait dans le sens inverse pour un conducteur chargé positivement. Notez que le champ électrique n'existe que en dehors du conducteur, et ni dans le conducteur même ni à l'intérieur du cylindre creux. De plus, notez que le champ est purement radial.



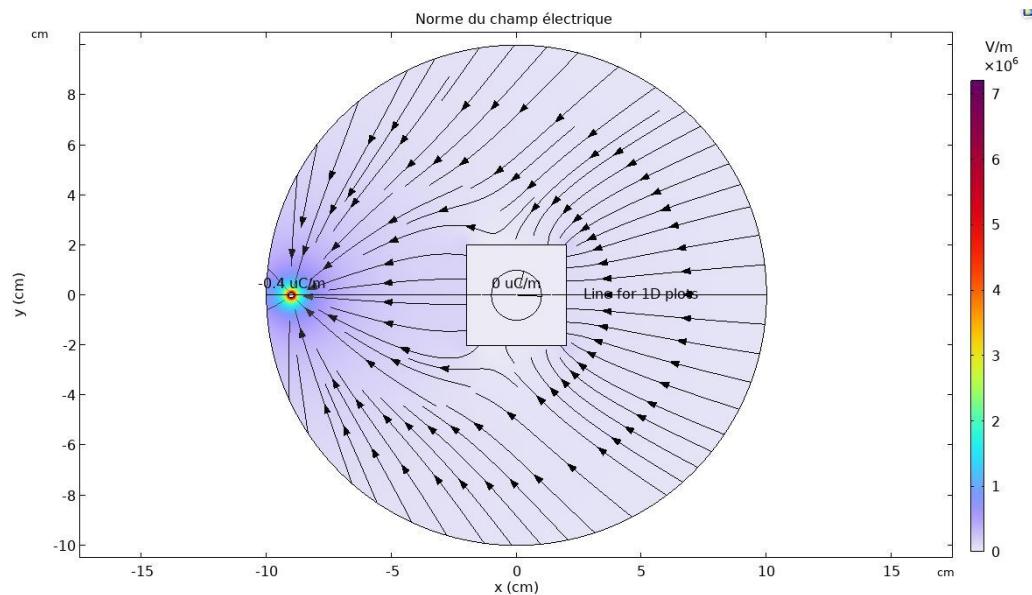
- (b) En transformant le cylindre creux en barre carrée creuse, nous observons l'effet de pointe. Cet effet donne que le champ électrique soit plus élevé aux coins de la barre, où le champ n'est plus purement radial mais a maintenant une composante azimutale. À l'intérieur du conducteur et à l'intérieur de la barre creuse nous n'avons toujours pas de champ électrique.



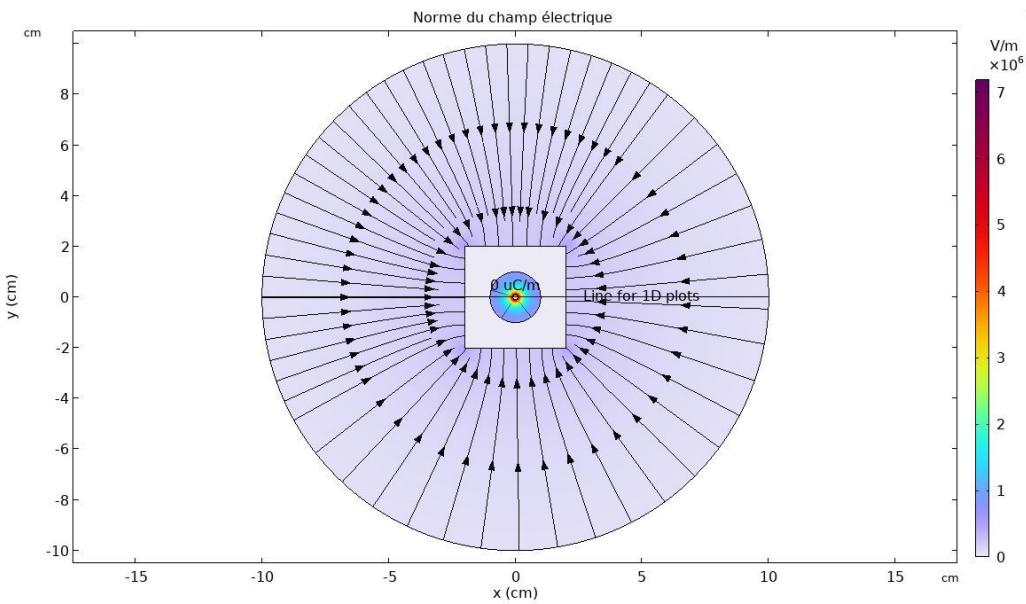
- (c) Maintenant nous observons l'effet d'une charge ponctuelle sur un conducteur creux. Le conducteur creux est une cage Faraday : il n'y a aucun champ électrique à l'intérieur du conducteur creux car les charges libres dans le conducteur se répartissent pour compenser le champ électrique externe. Nous voyons à partir du graphique que le champ électrique est exactement zéro à l'intérieur de la barre creuse (entre -1cm et +1cm sur l'axe x à y = 0 cm) ainsi que à l'intérieur du conducteur, et donc le potentiel est constant.



Nous observons que dans tous les cas, les lignes de champ arrivent perpendiculairement à la surface du conducteur.



- (d) Avec la charge ponctuelle à l'intérieur de la barre creuse, nous ne voyons plus l'effet de la cage Faraday. La loi de Gauss nous dit que nous aurons un champ électrique en dehors du conducteur - le conducteur ne bloque pas le champ électrique dans ce sens.



### Exercice 6: D'où vient l'énergie ?

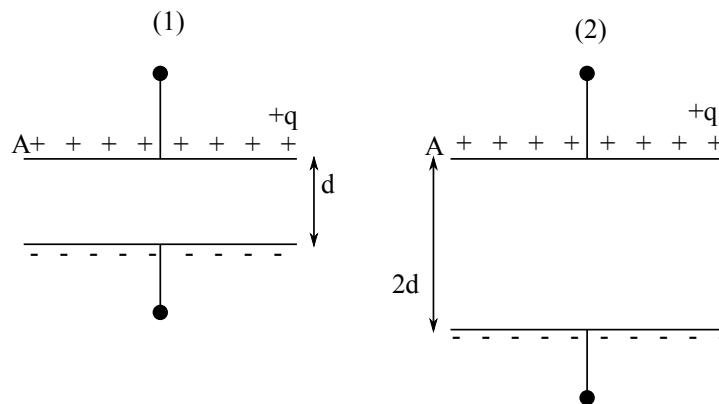
On considère un condensateur plan de surface  $A$ . Les deux plaques sont séparées par une distance  $d$ .

Le condensateur porte une charge  $q$  isolée. Quelle est l'énergie stockée dans ce condensateur ?

On écarte maintenant ses plaques d'une distance supplémentaire  $d$ . Ainsi la séparation entre les plaques est de  $2d$ . Quelle est l'énergie du condensateur dans cette nouvelle configuration ?

Expliquez cette variation d'énergie.

**Solution:**



En cours, nous avons vu que l'énergie stockée dans un condensateur plan est égale à

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 Ad$$

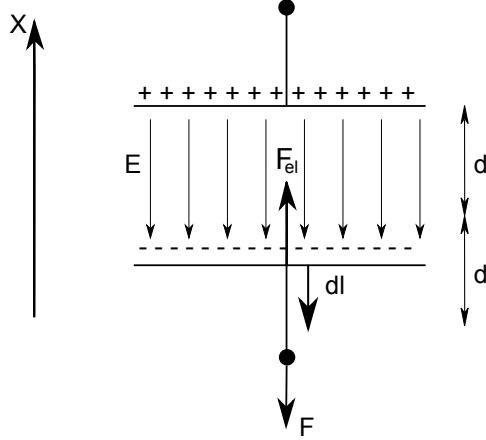
Le champ électrique généré par un plan infini chargé ne dépend pas de la distance entre les plaques mais uniquement de sa charge  $q$ . Dans les deux cas qui nous intéressent, la charge est la même donc  $E$  est le même également. On a :

$$W_1 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 Ad \quad \text{et} \quad W_2 = \epsilon_0 E^2 Ad$$

Donc  $W_2 > W_1$ .

Pourquoi l'énergie stockée dans le condensateur a-t-elle augmenté ? Comme les charges sur les

deux plaques sont de signes opposés, les plaques s'attirent et il faut fournir un travail pour écarter les plaques. L'énergie fournie durant ce travail sera stockée dans le condensateur, ainsi  $W_2 > W_1$ . On peut calculer la valeur de ce travail.



Pour déplacer la plaque du bas il faut exercer une force opposée à la force électrique exercée par les charges positives sur les charges négatives. Appelons les deux plaques  $p_{bas}, p_{haut}$ . Chaque plaque génère la moitié du champ électrique total entre les plaques :

$$\vec{E} = \vec{E}_{p_{bas}} + \vec{E}_{p_{haut}} = \left( -\frac{E}{2} \hat{e}_x \right) + \left( -\frac{E}{2} \hat{e}_x \right) = -E \hat{e}_x$$

Donc chaque plaque ne ressent que la moitié du champ électrique existant entre les plaques. Ainsi, la force à appliquer à  $p_{bas}$  pour compenser la force électrique  $\vec{F}_{el}$  due à  $p_{haut}$  vaut donc  $\vec{F} = -\frac{1}{2}qE\hat{e}_x$ , orientée vers le bas. Le travail nécessaire pour déplacer la plaque d'une distance  $d$  selon une trajectoire  $\gamma$  qui va de  $x = 0$  à  $x = -d$  vaut :

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\gamma} \left( -\frac{1}{2}qE\hat{e}_x \right) \cdot (-dl \hat{e}_x) = \frac{1}{2}qE \int_{\gamma} dl = \frac{1}{2}qEd = \frac{1}{2}CUEd \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} EdEd = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 Ad \end{aligned}$$

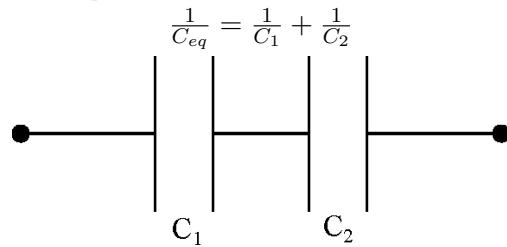
On voit que l'on a bien  $W_2 = W_1 + \Delta W$ .

*Remarque* : Pour calculer  $\Delta W$  on a calculé l'intégrale curviligne d'un champ vectoriel  $\vec{F}$  le long du chemin  $\gamma$  qui va de  $x = 0$  à  $x = -d$ . L'intégrale curviligne d'un champ vectoriel dépend de l'orientation de la trajectoire : si on considère la trajectoire  $\gamma'$  allant de  $x = -d$  à  $x = 0$ , on obtient un travail négatif,  $\Delta W' = -\Delta W$ , comme la force  $\vec{F}$  et le déplacement infinitésimal  $d\vec{l}$  ont directions opposées. Par contre, les intégrales curvilignes d'un champ scalaire le long d'un chemin ne dépendent pas de l'orientation de la trajectoire. On a donc, avec la notation ci-dessus,

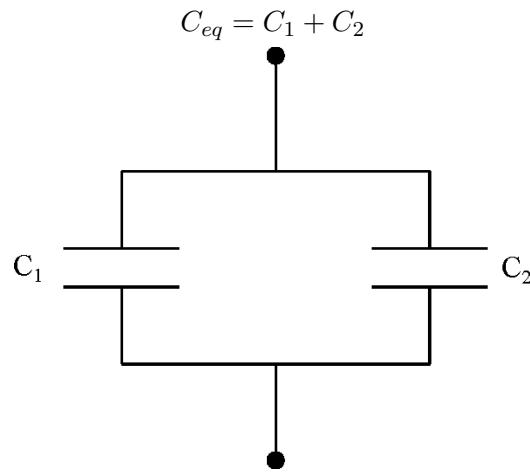
$$\int_{\gamma} dl = \int_{\gamma'} dl = d.$$

### Exercice 7: Condensateurs en série et en parallèle

- (a) Montrez que deux condensateurs en série de capacité  $C_1$  et  $C_2$  peuvent être remplacés par un seul condensateur de capacité  $C_{eq}$



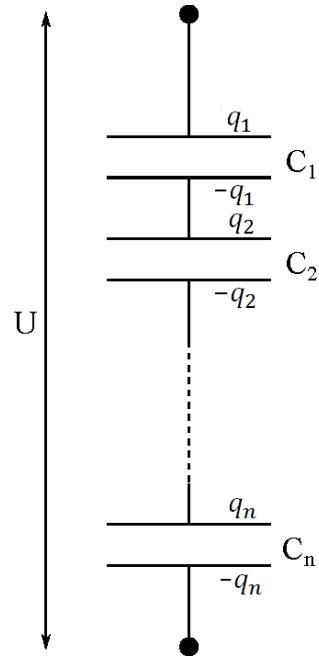
- (b) Montrez que si les deux condensateurs sont mis en parallèle, alors ils peuvent être remplacés par un condensateur de capacité  $C_{eq}$ .



Généralisez les deux cas pour  $n$  condensateurs de capacité  $C_1, \dots, C_n$ .

**Solution:**

- (a) On rappelle que la capacité du condensateur est :  $Q = C \cdot U$ , où  $Q$  est la charge sur une des plaques et  $U$  est la différence de tension entre les plaques.



Faisons le raisonnement directement pour  $n$  condensateurs en série. On cherche un condensateur  $C_{eq}$  tel que la tension  $U$  et la charge totale soient conservées. Notons  $u_i$  la tension aux bornes du condensateur  $i$  et  $q_i$  sa charge. On a :

$$\sum_i u_i = U$$

De plus, si l'on considère deux condensateurs en série, la portion de fil reliant les deux condensateurs relie la plaque inférieure d'un des condensateurs à la plaque supérieure d'un autre condensateur. Ces deux plaques et le fil reliant les deux composent un conducteur. Or, ce conducteur est non-chargé. Comme il n'y a pas de perte de charge le long de ce fil, les charges sur ces deux plaques satisfont donc

$$-q_i + q_{i+1} = 0 \quad \forall i$$

pour que chaque conducteur plaque-fil-plaque soit non-chargé. La charge dans les  $N$  condensateurs est donc la même :

$$q_i = q_j \equiv Q \quad \forall i, j$$

Donc :

$$\sum_i u_i = \sum_i \frac{q_i}{C_i} = Q \sum_i \frac{1}{C_i}$$

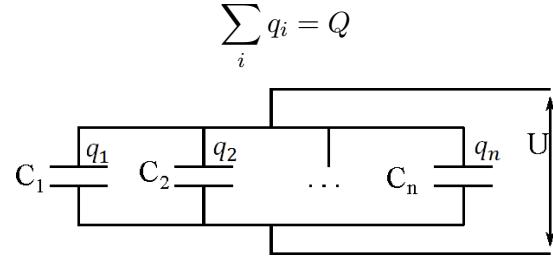
Par hypothèse on a :

$$\sum_i u_i = U = \frac{Q}{C_{eq}}$$

Donc :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

- (b) Pour les condensateurs en parallèle, on conserve les notations de la question précédente avec cette fois :



En revanche on a désormais :

$$\forall i, j, \quad U = u_i = u_j$$

puisque toutes les bornes supérieures et toutes les bornes inférieures sont reliées ensemble.

Or :

$$\sum_i q_i = \sum_i C_i u_i = U \sum_i C_i$$

Et par hypothèse :

$$\sum_i q_i = Q = C_{eq} U$$

Donc :

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$